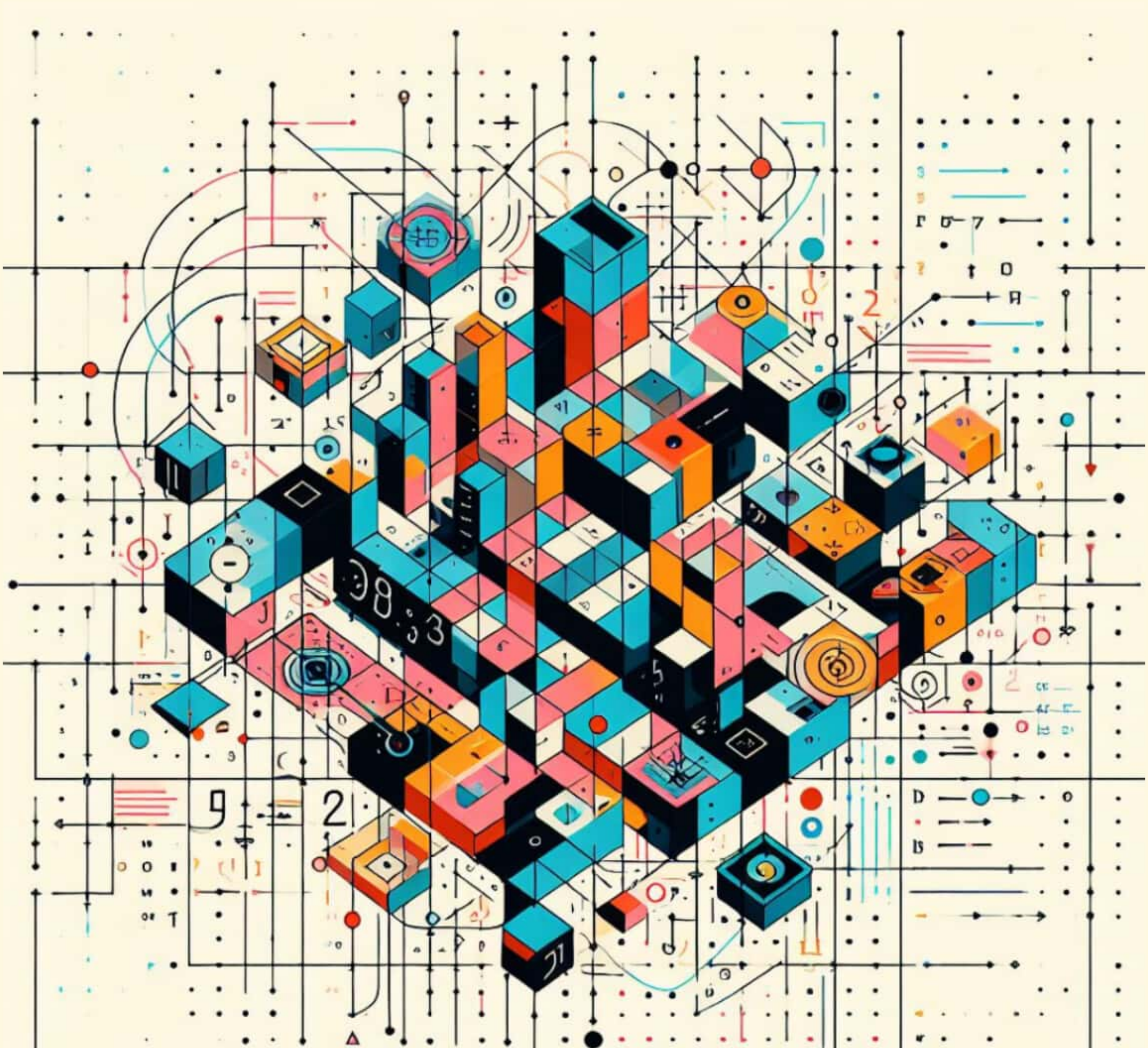
ساختمان های گسسته



دکتر مریم امیری

دانشگاه اراک

فهرست مطالب

* فصل ۳ تدریس نشد.

فصل 2، روابط: در این فصل تمرکز ما بر روابط خواهد بود؛ معمولاً روابط روی دو مجموعه بررسی می‌شود. به عنوان مثال دو مجموعه‌ی شرکت‌ها و کارمندان را در نظر بگیرید. می‌توانیم بگوییم بین کارمندان و شرکت‌هایی که در آنها مشغول به کار هستند، رابطه وجود دارد. (دانشجو - دانشگاه)، (شماره دانشجویی - دانشجو)

(روی مجموعه‌ها یا دو تا مجموعه)

مبنای پایگاه داده‌های مدل رابطه‌ای
جدول
رابطه

▷ ضرب دکارتی روی مجموعه‌ها:

$A\times B=\{(x,y)\mid x\in A,\ y\in B\}$

$A=\{1,2,3\}$, $B=\{a,b\}$ $\rightarrow$ $A\times B=\{(1,a),(1,b),(2,a),(2,b),(3,a),(3,b)\}$

▷ تابع یک حالت خاص از رابطه است:

$R\subseteq A\times B$

رابطه $\rightarrow$ از A به B

$R_1=\{(1,a),(3,b)\}$

$(1,a)\in R_1 \equiv 1\ R_1\ a$

$(2,a)\notin R_1 \equiv 2\ \not R_1\ a$

$F: A\rightarrow B$

$(a,F(a))$ $(a,\cancel{F(b)})$

تعریف رابطه روی یک مجموعه: رابطه‌ی R روی مجموعه‌ی A تعریف می‌شود اگر و فقط اگر $R\subseteq\{(x,y)\mid x,y\in A\}$ باشد.

E) فرض کنید $A=\{1,2,3,4\}$ و $R=\{(a,b)\mid a \text{ divides } b\}$ رابطه‌ی R را روی مجموعه‌ی A بنویسید.

$R=\{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(1,2),(1,3),(1,4),(2,4)\}$ $\quad 2\mid 4$

E) چه تعداد رابطه روی مجموعه‌ی A با n عضو می‌توان تعریف کرد؟

$R\subseteq A\times A \quad |A\times A|=n^2 \rightarrow 2^{n^2}$

خواص یک رابطه:

1) بازتابی بودن: با فرض اینکه رابطه R روی مجموعه A تعریف شده باشد می‌گوییم رابطه R بازتابی است اگر و فقط اگر $\forall a\in A \rightarrow (a,a)\in R$ (Reflexive)

1') ضد بازتابی (antireflexive): $\forall a\in A: (a,a)\notin R$

E) مشخص کنید کدام یک از روابط زیر دارای خاصیت بازتابی است؟ (فرض کنید این روابط روی مجموعه اعداد صحیح تعریف شده‌اند.)

$R_1:\{(a,b)\mid a\leq b\}$ $\longrightarrow$ $(a,a)\in R_1$ iff $a\leq a$ ✓

$R_2:\{(a,b)\mid a=b+1\}$ $\longrightarrow$ $(a,a)\in R_2 \longleftrightarrow a=a+1\rightarrow 0=1$ ✗

R_3: رابطه بخش‌پذیری $\longrightarrow$ $(a,a)\in R_3$ iff $a\mid a$ ✓

E) با فرض اینکه $A=\{1,2,3,4\}$ باشد؛ کدام یک از روابط تعریف شده روی A بازتابی و ضد بازتابی است؟

$R_1=\{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2),(3,4),(4,1),(4,4)\}$ بازتابی ✗ ضد بازتابی ✗

$R_2=\{(1,1),(1,2),(2,1)\}$ بازتابی ✗ ضد بازتابی ✗

$R_3=\{(1,1),(1,2),(1,4),(2,1),(2,2),(3,3),(4,1),(4,4)\}$ بازتابی ✓ ضد بازتابی ✗

$R_4=\{(3,4)\}$ بازتابی ✗ ضد بازتابی ✓

2) متقارن (symmetric): رابطه R روی مجموعه A متقارن است اگر برای هر $a,b\in A$ که $(a,b)\in R$ است آنگاه $(b,a)\in R$ باشد.

$\forall a\,\forall b\,[(a,b)\in R\rightarrow (b,a)\in R]$

2') ضد متقارن (antisymmetric): رابطه R روی مجموعه A ضد متقارن است اگر برای هر $a,b\in A$ که $(a,b)\in R$ و $(b,a)\in R$ است آنگاه $a=b$ باشد.

$\forall a\,\forall b\,[((a,b)\in R\wedge (b,a)\in R)\rightarrow (a=b)]$

Ex) با فرض اینکه ماتریس نظیر رابطه R به صورت زیر باشد. بستار متعدی رابطه R را محاسبه کنید:

$$M_R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad R^{\infty} = R^1 \cup R^2 \cup R^3$$

$$M_{R^2} = M_R \odot M_R = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad M_{R^3} = M_{R^2} \odot M_R = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad M_{R^*} = M_R \vee M_{R^2} \vee M_{R^3} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

الگوریتم فلوید - وارشال:

$M_R = W_0 \quad W_1 \cdots W_n \qquad |A| = n \ , \ R$

هدف ← محاسبه راحت و کارآمدتر R^{∞} . $w_{ij}^{(k)} \in \{0, 1\}$ ← یعنی مسیری به طول k (حداکثر) از رأس i به رأس j تنها با عبور از رئوس میانی $\{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$ وجود دارد

$W_n = M_{R^*}$

تفکر بازگشتی: فرض کنید ماتریس W_{k-1} را داریم. طبق تعاریف ارائه شده می خواهیم به کمک W_{k-1}، W_k را محاسبه کنیم

$w_{k-1}[ij] = 1$

$\{v_1, v_2, \ldots, v_{k-1}\} \qquad v_i \xrightarrow{\text{با طول } k-1} v_j \qquad W_{k-1}$

حالت 1

$v_i \longrightarrow v_k \longrightarrow v_j \qquad \{v_1, \ldots, v_{k-1}\} \qquad \{v_1, v_2, \ldots, v_{k-1}, v_k\}$

$$W_{k-1}[ik] \wedge W_{k-1}[kj]$$

در حالت دوم می توان از رأس i به رأس j بدون عبور از v_k برویم. یعنی رئوس میانی همچنان $\{v_1, \ldots, v_{k-1}\}$ خواهد بود.

$$W_k[ij] = \underbrace{W_{k-1}[ij]}_{\text{عدم استفاده از } v_k} \vee \underbrace{\left(W_{k-1}[i\overset{\text{ستون}}{k}] \wedge W_{k-1}[\overset{\text{سطر}}{k}j]\right)}_{\text{استفاده از رأس } v_k}$$

$P =$ { مکان وقوع 1 ها در ستون k-ام (در ماتریس W_{k-1})

$Q =$ { مکان وقوع 1 ها در سطر k-ام (در ماتریس W_{k-1})

ترکیب به صورت زوج مرتب $\Rightarrow (p, q) = 1$

Ex) با استفاده از الگوریتم وارشال بستار متعدی رابطه زیر را به دست آورید.

$$R = W_0 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad W_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad W_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

استفاده از حالت دوم: $p = 2 \quad q = 2 \rightarrow (2,2) = 1$

$p = 1, 2 \longrightarrow (1,1)\ (1,2)\ (1,3)$

$q = 1, 2, 3 \qquad (2,1)\ (2,2)\ (2,3)$

$$W_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad W_4 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$p = 1, 2 \ , \ q = 4 \rightarrow (1,4)\ (2,4)$

$p = 1, 2, 3, 4 \ , \ q = 4 \rightarrow (1,4)\ (2,4)\ (3,4)\ (4,4)$

☑ اگر L متناهی باشد آنگاه یک مشبکه ی محدود داریم. (L, ≤)

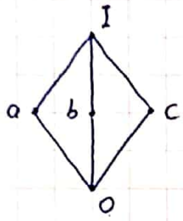
$(P(S), \subseteq)$ → $I = S$, $O = \varnothing$

اگر S متناهی باشد ← متناهی است

متمم: فرض کنید (L, ≤) یک مشبکه باشد. اگر این مشبکه محدود بوده و I بزرگ‌ترین عضو و O کوچک‌ترین عضو باشد و $a, a' \in L$ باشند. می‌گوییم a' متمم a است اگر $a \wedge a' = 0$ و $a \vee a' = I$

$0 \le a$	$a \le I$
$a \wedge 0 = 0$	$a \vee I = I$
$a \vee 0 = a$	$a \wedge I = a$

Ex) متمم a و c را مشخص کنید.



$a \wedge b = 0$, $a \vee b = I$ → b متمم a است

$c \wedge b = 0$, $c \vee b = I$ → b متمم c است

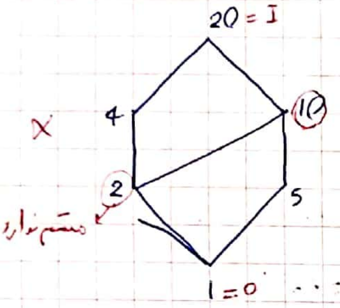
$a \wedge c = 0$, $a \vee c = I$ → c متمم a است

$c \wedge a = 0$, $c \vee a = I$ → a متمم c است

مشبکه ی متمم دار:

مشبکه ی محدودی که هر عضو آن دارای متمم باشد.

Ex) آیا مشبکه ی $(D_{20}, |)$ متمم دار است یا خیر؟



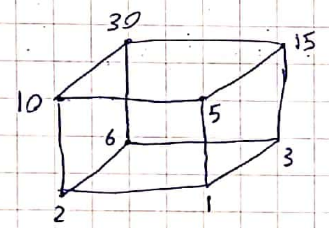
$\begin{cases} 2 \le 10 \\ 2 \wedge 10 = 2 \\ 2 \vee 10 = 10 \end{cases}$ $\begin{cases} 2 \le 20 \\ 2 \wedge 20 = 2 \\ 2 \vee 20 = 20 \end{cases}$

$2 \wedge \boxed{x} = 1$

$2 \vee \boxed{x} = 20$

از آنجایی که 2 و 10 متمم ندارند، مشبکه متمم دار نیست.

$D_{30} = \{1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30\}$



ک.ب.ب

1 → LUB

GLB

ب.ب.پ

متمم 5 ، 6 است.

متمم 3 ، 10 است.

متمم دار ✓

مشبکه ی پخش پذیر: مشبکه ی L و رابطه ترتیب جزئی (L, ≤) را پخش پذیر می‌گوییم اگر و تنها اگر به ازای هر $a, b, c \in L$ روابط زیر برقرار باشد.

$a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$

$a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$

Ex) آیا مشبکه ی $(P(S), \subseteq)$ پخش پذیر است؟

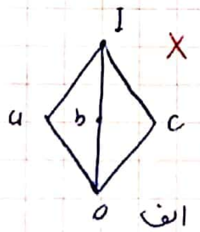
می‌دانیم در مشبکه ی فوق GLB اشتراک دو مجموعه و LUB، اجتماع دو مجموعه است. با توجه به تعریف پخش پذیر بودن خواهیم داشت:

$a, b, c \in P(S)$ $a \wedge (b \vee c) \equiv a \cap (b \cup c) \equiv (a \cap b) \cup (a \cap c)$ ✓

خاصیت پخش مجموعه ها

$a \vee (b \wedge c) \equiv a \cup (b \cap c) \equiv (a \cup b) \cap (a \cup c)$

Ex) آیا مشبکه های زیر پخش پذیر هستند؟



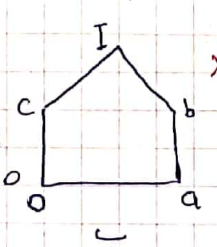
X

$a \wedge (b \vee c) \equiv a \wedge I = a$

≠

$(a \wedge b) \vee (a \wedge c) \equiv 0 \vee 0 = 0$

مهم



X

$a \wedge (b \vee c) = a \wedge I = a$

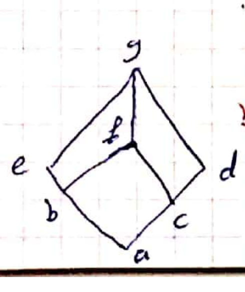
$(a \wedge b) \vee (a \wedge c) \equiv a \vee 0 \equiv a$ ✓

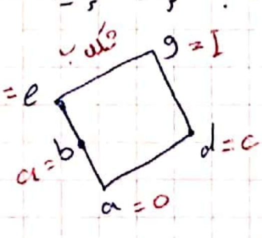
$a \vee (b \wedge c) \equiv a \vee 0 = a$

$(a \vee b) \wedge (a \vee c) = b \wedge I = b$ ≠

☑ در صورتی که در یک مشبکه زیرمشبکه ای به صورت شکل الف یا ب داشته باشیم آنگاه آن مشبکه پخش ناپذیر است.

Ex) آیا مشبکه ی زیر پخش پذیر است؟





→ × پخش پذیر نیست

تمرین های دوره ای اول

سوال دوم

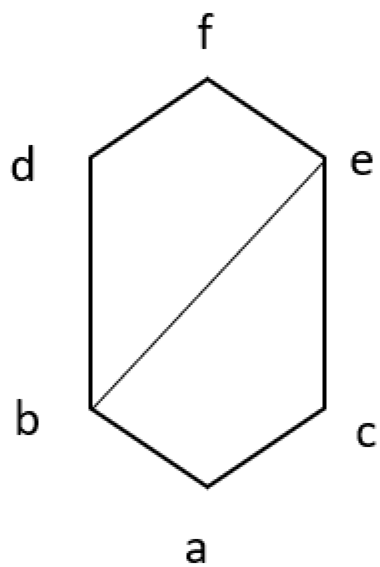
نشان دهید که برای n >= 2 داریم:

$$\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + ... + \frac{1}{\sqrt{n}} > \sqrt{n}$$

تمرین های دوره ای اول

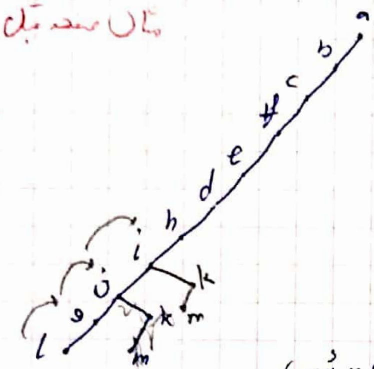
سوال 5

تمام زوج مرتب های نظیر رابطه ترتیب جزئی با نمودار هاس زیر را مشخص کنید.



② پیمایش عمق اول (DFS) : به دلخواه یک رأس را انتخاب می‌کنیم با اضافه کردن متوالی رئوس و یال‌ها مسیری را تشکیل می‌دهیم که از این رأس شروع می‌شود. هر یال جدید که در مسیر درج می‌شود با آخرین رأس در مسیر برخورد می‌کند و این یال به رأسی متصل می‌شود که قبلاً ملاقات نشده. درصورتی که نتوانیم مسیر را در رأس فعلی گسترش دهیم، یک مرحله به عقب برگشته و از رأس والد مسیر جدیدی را می‌سازیم. این الگوریتم تا زمانی که همه رئوس ملاقات شوند ادامه می‌یابد.

Ex) مثال صفحه قبل

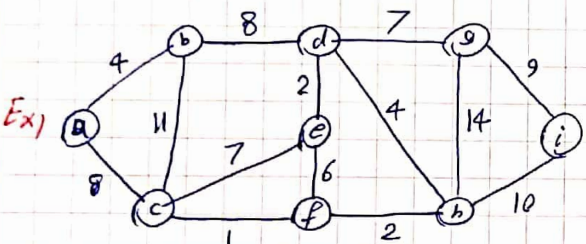


درخت پوشای مینیمم: اگر گراف به صورت وزن‌دار باشد، می‌خواهیم درخت پوشایی بسازیم که جمع وزن یال‌های آن حداقل باشد. دو الگوریتم برای این منظور وجود دارد: الگوریتم پریم و الگوریتم کروسکال.

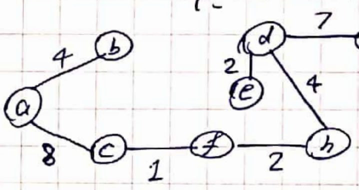
الگوریتم پریم: رأسی به دلخواه انتخاب می‌شود. از بین رئوس انتخاب نشده، رأسی که با یالی با کمترین وزن به رئوس انتخاب شده متصل می‌گردد انتخاب خواهد شد.

الگوریتم کروسکال: یال‌ها به صورت صعودی براساس وزن مرتب می‌شوند. یال‌ها به ترتیب بررسی شده و درصورتی که باعث ایجاد دور در درخت نشوند، آنها را به درخت اضافه می‌کنیم.

Ex)



پریم



کروسکال (راه‌حل)